Exercice 3 — 30 min — 4 pt

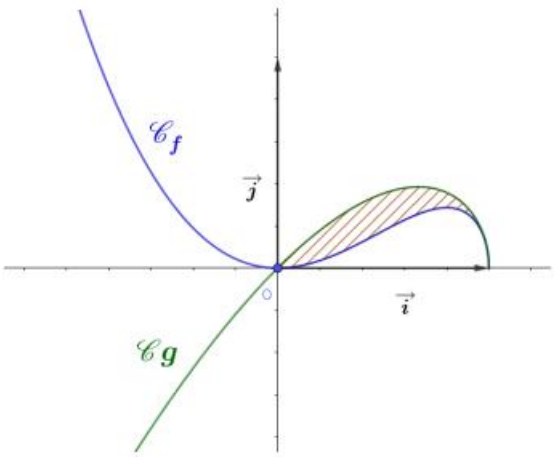
Soit F la fonction définie sur $]-1;1[$ par $F(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]-1;1[$ et calculer $F'(x)$.
2. Soit G la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\cos(x))-F(\sin(x))$.
   - a) Montrer que G est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.
   - b) En déduire $G(x)$ en fonction de x.
   - c) Calculer alors $\int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 4 — 30 min — 3 pt

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

1. Montrer que $I_0=\frac{2}{3}$.
2. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $(2n+5)I_{n+1}=2(n+1)I_n$.
   - b) En déduire la valeur de I_1.
   - c) Calculer alors $J=\int_0^1 (x+1)^2\sqrt{1-x}dx$
3. Dans la figure ci-dessous, on a représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$ et $g(x)=x\sqrt{1-x}$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie hachurée sur le graphique.



www.takiacademy.com